

**Расчетно-графическое задание №4**  
**РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО**  
**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА**  
**МЕТОДОМ ВЗВЕШЕННЫХ НЕВЯЗОК**

**Цели:**

1. Научиться решать краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений приближенно с использованием метода взвешенных невязок в форме метода коллокаций и метода Бубнова-Галеркина.
2. Получить представление о влиянии выбора базисных функций на точность приближенного решения.

**Задание**

Решите на отрезке  $[a, b]$  краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$-y'' + q(x)y = f(x)$$

с граничными условиями

$$y(a) = y_a, y(b) = y_b$$

методом взвешенных невязок для двух базисов

1. степенные базисные функции (полиномы):

$$\Psi(x) = y_a + \frac{x-a}{b-a}(y_b - y_a), \varphi_j(x) = (x-a)^j(b-x), j = \overline{1, n};$$

2. периодические базисные функции:

$$\Psi(x) = y_a + \frac{x-a}{b-a}(y_b - y_a), \varphi_j(x) = \sin\left(\frac{j\pi(x-a)}{b-a}\right), j = \overline{1, n}.$$

Постройте графики точного аналитического решения и приближенных решений, сравните полученные результаты. Повторите действия для другого количества функций  $n$  в базисе. Сделайте вывод о влиянии количества базисных функций на точность решения.

В качестве метода взвешенных невязок использовать

1. метод коллокаций по точкам;
2. метод Бубнова-Галеркина.

## ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

В качестве отрезка  $[a, b]$  рассмотреть отрезок  $[0, 1]$ .

Функции  $q(x)$ ,  $f(x)$  и значения  $y_a$ ,  $y_b$  заданы в таблице.

№	$q(x)$	$f(x)$	$y_a$	$y_b$
1	1	$5 \sin 2x$	0	$\sin 2$
2	$2(1+x)$	$2 - \frac{2}{(1+x)^3}$	1	$\frac{1}{2}$
3	$e^2$	$e^{2x}$	2	$1 + e$
4	$1+x$	$3x+3$	3	3
5	$\frac{\pi^2}{16}$	$\frac{\pi^2 \sqrt{2}}{8} \sin \frac{\pi x}{4}$	0	2
6	1	$2+x-x^2$	1	$e$
7	$\frac{\pi^2}{2}$	$\frac{\pi^2}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\pi x}{2}\right)$	1	0
8	$2e^x$	$x e^x (e^x - 1)$	1	$1 + e$
9	$\frac{3}{(2-x)^2}$	$\frac{1}{(2-x)^3}$	$\frac{1}{2}$	1
10	5	$e^{2x}$	1	$e^2$
11	$\frac{7\pi^2}{16}$	$\pi^2 \cos \frac{\pi x}{4}$	2	$\sqrt{2}$
12	$\frac{2}{(1+x)^2}$	$\frac{2x}{(1+x)^2}$	1	$\frac{3}{2}$

№	$q(x)$	$f(x)$	$y_a$	$y_b$
13	$\frac{1}{1+x}$	$x-1$	1	4
14	2	$2x(x-1)$	1	1
15	$e^x$	$xe^{2x} - 2e^x$	0	$1+e$
16	$\frac{1}{1+x}$	$\frac{x}{1+x}$	0	1
17	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}$	1	$\sqrt{e}$
18	$\frac{3\pi^2}{4}$	$\pi^2 \cos \frac{\pi x}{2}$	1	0
19	6	$2e^{2x-1}$	$\frac{1}{e}$	$e$
20	$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi^2 + 1}{4} \sin \frac{\pi(x+1)}{2}$	1	0
21	$2\pi^2$	$3\pi^2 \sin \pi x$	0	0
22	$x^2$	$(x^2 - 1)e^{-x}$	1	$\frac{1}{e}$
23	$\frac{1}{1+x}$	$x^2 - 4x - 5$	1	8
24	$\frac{5\pi^2}{9}$	$\pi^2 \sin \frac{\pi(4x+1)}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
25	1	$1 + 6x - x^3$	1	0
26	2	$2x(x+1)$	1	3
27	$x+1$	$xe^x$	1	$e$
28	$2-x$	$(1-x)e^{1-x}$	$e$	1
29	$\frac{5\pi^2}{9}$	$\pi^2 \cos \frac{\pi(2x-1)}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

№	$q(x)$	$f(x)$	$y_a$	$y_b$
30	$\frac{1}{1+x}$	$-\frac{1}{1+x} + \ln(1+x) - 1$	0	$\ln 4 - 2$